CALCUL DIFFÉRENTIEL

dernière MAJ : 29/04/09 - 11:00

Plan du cours :

I/Introduction et généralités

1/Fonctions de plusieurs variables

Une fonction réelle de plusieurs variables réelles est une application d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple : On peut définir la fonction $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y,z)=(x^2y+4,\cos(e^{xz}))$.

2/Notions d'ouverts et de fermés

a/Norme euclidienne

Si $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de X est le réel positif noté $\|X\|$, tel que $\|X\|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\dots+x_n{}^2}$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, si $X=(x,y)$, alors $\|X\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés :

1. $\|X\|=0\Leftrightarrow X=0$
2. $\|a.X\|=|a|.\|X\|, a\in\mathbb{R}$
3. $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$

b/Boules ouvertes et fermées

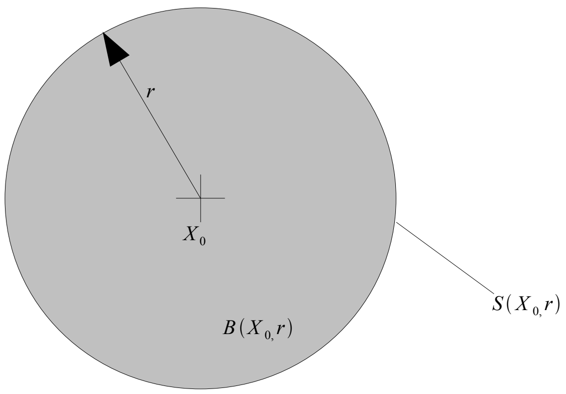
Soient $X_0=(x_{0_1},x_{0_2},\dots,x_{0_n})\in\mathbb{R}^n$ et $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a alors :

- $B(X_0,r)=\{X\in\mathbb{R}^n,\|X-X_0\|<r\}$ est la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r .
- $\overline{B}(X_0,r)=\{X\in\mathbb{R}^n,\|X-X_0\|\leqslant r\}$ est la boule fermée de centre X_0 et de rayon r .
- $S(X_0,r)=\{X\in\mathbb{R}^n,\|X-X_0\|=r\}$ est la sphère de centre X_0 et de rayon r .
- $B(X_0,r)$ est l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(X_0,r)$.
- $S(X_0,r)$ est la frontière de la boule fermée $\overline{B}(X_0,r)$.
- $\overline{B}(X_0,r)=B(X_0,r)\cup S(X_0,r)$

<u>Exemple :</u> Dans $\mathbb{R}^2$, soit $X_0=(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2, X=(x, y)=\mathbb{R}^2$.

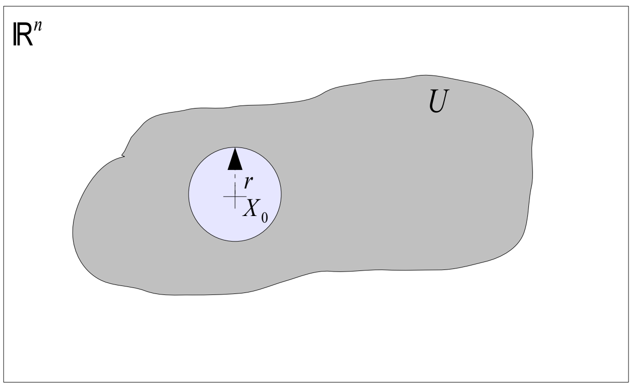
On a :
$B(X_0, r)=\{X\in\mathbb{R}^n, \|X-X_0\|\leqslant r\}=\{X=(x, y), \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}$.
$B(X_0, r)$ est le disque ouvert de centre X_0 et de rayon r .
On a aussi : $\overline{B}(X_0, r)=\{X=(x, y), (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2\}$
et $S(X_0, r)=\{X=(x, y), (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$.

La représentation est la suivante :



c/Sous-ensembles

Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est ouvert s'il est vide ou si pour tout point X_0 de U , il existe un réel positif $r>0$ tel que $B(X_{0,}r)\subset U$.



Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est fermé si son complémentaire $\mathbb{R}^n-F$ est ouvert.

<u>Propriétés :</u>

1. $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont aussi des fermés de $\mathbb{R}^n$.
3. Toute union d'ouverts est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4. Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

- Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des ouverts est constitué de $\emptyset$, $\mathbb{R}$, d'unions et d'intersections finies d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (de type $]a,b[\,; a,b \in \mathbb{R}$).
- Le produit cartésien de n ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

II/Calcul différentiel

1/Limite d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, avec $X_0 \in D$ un point. On dit que f admet en X_0 la limite $l = \lim_{X_0} f = \lim_{X \to X_0} f(X)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|X - X_0\| < \alpha \Rightarrow |f(X) - l| < \varepsilon$.

On a également :
$\lim_{X \to X_0} f(X) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0 ; \|X - X_0\| < \alpha \Rightarrow |f(X)| > A$

Remarque : Pour que $l = \lim_{X_0} f = \lim_{X \to X_0} f(X)$ existe, il faut que $f(X)$ tende vers la même valeur, quelque soit la façon d'approcher le point X_0 .

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Cherchons la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$.

En passant en coordonnées polaires, on pose :
$\begin{cases} x = r.cos(\theta) \\ y = r.sin(\theta) \end{cases}$
Soit g la fonction telle que $g(r,\theta) = f(r.cos(\theta), r.sin(\theta))$. On a donc $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f = \lim_{r \to 0} g$.
En remplaçant, on a :
$g(r,\theta) = \sin(\theta).cos^2(\theta).r$.
On en déduit : $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \to 0} g(r,\theta) = 0 ; \forall \theta \in \mathbb{R}$.

2. Soit $f(x,y) = \dfrac{x.y}{x^2 + y^2}$ définie si $(x,y) \neq (0,0)$. Cherchons la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$.

Si $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$.
Or, en posant $y = x$, on a $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$.
Les limites ne sont pas identiques. On en déduit que la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas.

Propriétés :

1. $\lim\limits_{X_0} (f+g) = \lim\limits_{X_0} f + \lim\limits_{X_0} g$.
2. $\lim\limits_{X_0} (f \times g) = \lim\limits_{X_0} f \times \lim\limits_{X_0} g$.
3. $\lim\limits_{X_0} (a.f) = a.\lim\limits_{X_0} f$, avec $a \in \mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{X_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim\limits_{X_0} f}{\lim\limits_{X_0} g}$, avec $g \neq 0$ sur D .

2/Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est continue au point $X_0 \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{X_0} f = f(X_0)$.

Proposition : La somme, le produit, la multiplication par un scalaire, le quotient et la composée de fonctions continue sont continues.

3/Dérivées partielles d'une fonction réelle

Soient f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, et un un point $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On dit que f admet une dérivée partielle au point X par rapport à la variable x_i si et seulement si :

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$ existe et est finie.

La dérivée partielle de f au point X par rapport à la variable x_i s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h} .$$

Remarques :

- $\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ est une fonction définie sur D et à valeur dans $\mathbb{R}$ si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe pour tout $X \in D$.
- Sauf si f est prolongée par continuité en X , le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ s'obtient en dérivant f par rapport à x_i tout en considérant les autres variables constantes.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2.y}{x^2+y^2}, \forall (x, y) \neq (0,0) \\ 0, \forall (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Cherchons $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0{,}0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)$.

Par calcul, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2.x.y^3}{(x^2+y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2.(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Au point $(x,y)=(0{,}0)$:

- Calculons d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)$.

On a, pour $h\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(h{,}0)-f(0{,}0)}{h}=0$ existe et est finie.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)=0$.

- De même, on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)=0$.

4/Différentiabilité et différentielle de fonctions réelles

a/Approche d'une fonction différentiable

Soit une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Le graphe de f est une surface définie par $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=f(x,y)\}$.

L'équation du plan tangent au graphe G en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est, si les dérivées partielles existent :

$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)$.

On dit alors que f est différentiable au point (x_0,y_0) si $f(x,y)$ est proche de :

$f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)$.

b/Formule de Taylor

$g(x,y)=o(\|(x-x_0,y-y_0)\|)$ en (x_0,y_0) si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{g(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}=0$.

Formule de Taylor :

Soient f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in D$ et (h,k) un point proche du point $(0{,}0)$ tel que $(x_0+h,y_0+k)\in D$.

f est alors différentiable en (x_0,y_0) si :

$f(x_0+h,y_0+h)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).k+o(\|(h,k)\|)$.

La différentielle au point (x_0,y_0) est alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$df(x_0,y_0)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).k$

Exemple :

Soient $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y)=xy$ et $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Regardons si f est différentiable en (x_0, y_0) .

On prend un point $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ proche de $(0,0)$. On a les dérivées partielles :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)=y_0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)=x_0$.
Ainsi, d'après la formule de Taylor, f est différentiable en (x_0, y_0) si :
$f(x_0+h, y_0+h)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).k+o(\|(h,k)\|)$, soit si :
$f(x_0+h, y_0+h)-f(x_0, y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).k=o(\|(h,k)\|)$.
D'où si :
$(x_0+h)(y_0+k)-x_0 y_0-y_0 h-x_0 k=hk=o(\|(h,k)\|)$.
Il faut donc regarder si $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$.
Passons en coordonnées polaires. On pose $\begin{cases} x=r.cos(\theta) \\ y=r.sin(\theta) \end{cases}$. On obtient :
$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{r\to 0} r.\cos(\theta).\sin(\theta)=0$, donc $hk=o(\|(h,k)\|)$.
f est donc différentiable en tout point $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

c/Généralisation

Soient f une fonction définie sur un ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$ et $X_0\in D$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)$,..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)$ existent, alors la différentielle en X_0 est l'application linéaire $df(X_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que $df(h_1,h_2,\dots,h_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0).h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0).h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0).h_n$.
$df(X_0)$ est représentée par le vecteur (ou matrice) ligne :
$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0).h_1 & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0).h_2 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0).h_n \end{pmatrix}$
Il s'agit du <u>gradient</u> de f en X_0 , noté $grad\, f(X_0)$ ou $\nabla f(X_0)$.

Exemple : Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z)=\cos(e^x+y)+xyz+10$.
Calculons $\nabla f(0,0,0)$. f est différentiable en $(0,0,0)$, d'où :
$$\nabla f(0,0,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \end{pmatrix}=-\sin(1)(1 \quad 1 \quad 0) .$$

Ainsi, la différentielle de f en $(0,0,0)$ est $df(0,0,0):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que :
$df(0,0,0)(h_1,h_2,h_3)=-\sin(1)(h_1+h_2)=\nabla f(0,0,0)\cdot(h_1,h_2,h_3)$

Soit f définie sur un domaine ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$, $X_0\in D$ et $H=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ proche du point $(0,0,\dots,0)$ tel que $X_0+H\in D$. On a que f est différentiable au point X_0 si :
$f(X_0+h)=f(X_0)+\nabla f(X_0)\cdot H+o(\|H\|)$.

<u>Propriété :</u> Si f est différentiable en X_0, alors f est continue en X_0.
<u>Contraposée :</u> Si f n'est pas continue en X_0, alors f n'est pas différentiable en X_0.

5/Fonctions réelles de classe C¹

Soit f définie sur un domaine ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$ et un point $X_0\in D$. f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ au point X_0 si et seulement si $\forall i\in\{1,\dots,n\}$:

(i) les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ existent.

(ii) Les applications dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ sont continues en X_0.

De plus, si f est $\mathcal{C}^1$ en X_0, alors f est différentiable en X_0.

<u>Exemple :</u>

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2.y^2}{x^2+y^2},\forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\forall(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Sur $(\mathbb{R}^2)^*$, f est le quotient de deux polynômes en (x,y), donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^2)^*$.
Par calcul, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2.x.y^4}{(x^2+y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2.y.x^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si elle est $\mathcal{C}^1$ au point $(0,0)$.

Pour $h\neq0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$.

Les applications dérivées partielles existent bien au point $(0,0)$. Reste à examiner si elles sont continues.
On a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2.x.y^4}{(x^2+y)^2}=0 \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2.y.x^4}{(x^2+y)^2}=0$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6/Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 d'une fonction réelle

a/Dérivées partielles secondes

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$. Les dérivées partielles secondes de f en un point X sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X) ; \forall i,j\in[1..n]$$

b/Fonction de classe C²

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ au point X_0 si et seulement si les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_i} ; \forall i\in[1..n]$ sont $\mathcal{C}^1$ en X_0 .

c/Théorème de Schwarz

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ en X_0 , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) ; \forall (i,j)\in[1..n]^2$.

7/Fonctions de plusieurs variables $\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^p$

a/Propriétés

Soit f une fonction définie sur un ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^p$ telle que $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots, f_n(x_1,\dots,x_n))$, où f_i sont des fonctions réelles, avec $f_i:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$. On a alors :

(i) f est continue si et seulement si chaque f_i est continue.

(ii) f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si chaque f_i est $\mathcal{C}^1$.

(iii) La différentielle au point $X_0\in D$ de f est l'application $\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^p$ notée $df(X_0)$ représentée par la matrice jacobienne de f au point X_0 . C'est une matrice de taille $p\times n$, notée $J_f(X_0)$, telle que :

$$J_f(X_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

$df(X_0):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^p$ est l'application linéaire telle que : $df(h_1,\dots,h_n)\rightarrow J_f(X_0)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

Remarque : Sur la ligne i de la matrice jacobienne, on retrouve toutes les dérivées partielles de la fonction f_i. Sur la colonne j, on retrouve toutes les dérivées partielles selon la variable x_j.

Exemple : Soient une fonction $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que $f(x,y,z)=(xyz, \cos(xy), e^{xyz}, x+z+1)$, et le point $X_0=(0,0,0)$. Cherchons $J_f(X_0)$ et $df(X_0)$.

En appliquant la formule, on trouve :

$$J_f(X_0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } df(X_0)=J_f(X_0)\cdot(h_1,h_2,h_3)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1+h_3 \end{pmatrix}.$$

b/Opérations sur les fonctions de plusieurs variables

i/Généralités

(i) La somme de deux fonctions différentiables f et g sur D est différentiable. On a :

$$d(f+g)(X_0)=df(X_0)+dg(X_0).$$

(ii) La multiplication par un scalaire d'une fonction f différentiable donne une fonction différentiable :

$$d(\lambda f)(X_0)=\lambda\, df(X_0).$$

(iii) Le produit de deux fonctions différentiables f et g (avec f et g $:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) est différentiable. On a :

$$d(f.g)(X_0)=df(X_0).g(X_0)+df(X_0).f(X_0).$$

(iv) Le quotient de deux fonctions f et g différentiables (avec f et g $:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\neq 0$ au voisinage de (X_0)) est une fonction différentiable. On a :

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(X_0)=\frac{g(X_0).df(X_0)-f(X_0).dg(X_0)}{g^2(X_0)}.$$

Propriété : La somme, la multiplication par un scalaire, le produit et le quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ donnent des fonctions $\mathcal{C}^1$.

ii/Théorème de composition

Si $g:(D_1\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^p$ et $f:(D_2\subset\mathbb{R}^p)\to\mathbb{R}^q$, avec f et g deux fonctions différentiables et D_1 et D_2 des ouverts tels que $g(D_1)\subset D_2$, alors :

(i) $f\circ g$ est différentiable sur D_1.

(ii) $d(f\circ g)=df(g(X_0)).dg(X_0)$.

(iii) $J_{f\circ g}=J_f(g(X_0)).J_g(X_0)$