SÉRIES DE FOURIER

dernière MAJ : 01/02/09 - 17:15

Plan du cours :

I/Définitions et étude de la convergence

1/Définitions

On appelle série de Fourier (ou série trigonométrique) toute série $\sum u_n(x)$ telle que $u_n(x)=a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$, avec $(a_n,b_n)\in\mathbb{C}^2$ et $\omega\in\mathbb{R}, \omega>0$.

Remarques :

1/ $u_n(x)$ est une fonction périodique de période $T_n=\frac{2\pi}{n\omega}$.

2/Lorsque $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge, elle converge vers la fonction somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)=f(x)$.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, et f est périodique, de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

2/Étude de la convergence

a/Convergence normale

Remarque : $\forall x\in\mathbb{R}, |u_n(x)|=|a_n\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)|\leqslant|a_n|+|b_n|$ (inégalité triangulaire)

Ainsi, si $\sum|a_n|$ et $\sum|b_n|$ convergent, alors $\sum|u_n(x)|$ converge.
On dit que $\sum|u_n(x)|$ est normalement convergente.

On a alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ qui converge vers la fonction somme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ telle que f est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable terme à terme.
On a par exemple $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)=\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u_n(x)\,dx$.

Exemple : Déterminons la convergence de la série de Fourier : $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{\cos(n\pi x)}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$. Or, $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série de Fourier converge vers la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$. On a aussi $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

b/« Critère d'Abel »

Si les suites (a_n) et (b_n) réelles, positives et décroissantes vers 0, alors $\sum u_n(x)$ converge si $x \neq \frac{k2\pi}{\omega}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La fonction somme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur tout intervalle du type $\left]\frac{2k\pi}{\omega};\frac{2(k+1)\pi}{\omega}\right[$.

Exemple : Déterminons la convergence de la série de Fourier : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}.\sin(n\omega)$.

La fonction $f: x \to \frac{1}{n}$ est réelle, positive et décroissante vers 0, donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{x}$ converge vers la fonction somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}$ si $x \neq k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

f est continue sur tout intervalle du type $]2k\pi;2(k+1)\pi[$ et est 2π périodique.

II/Calculs des coefficients d'une série de Fourier

Proposition :

Si la série de Fourier $\sum a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$ converge vers la fonction somme $\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)}$, avec f de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$, et si f est intégrable terme à terme sur tout intervalle $]\alpha;\alpha+T[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\begin{cases} a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x).dx \\ a_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x).\cos(n\omega x).dx \\ b_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x).\sin(n\omega x).dx \end{cases}}$$

avec $n \geqslant 1$.

Remarque :

Dans certains ouvrages, on peut trouver : $a_0=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x).dx$.

On écrit alors $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$.

III/Forme complexe d'une série de Fourier

Cherchons la forme complexe d'une série de Fourier :

Soit la fonction suivante :
$u_n(x)=a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$.

D'après les formules d'Euler, on a :
$$u_n(x)=a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)=a_n.\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}+b_n.\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2i}$$
Soit :
$$u_n(x)=\frac{a_n-i.b_n}{2}.e^{in\omega x}+\frac{a_n+i.b_n}{2}.e^{-in\omega x}.$$

Posons $c_n=\dfrac{a_n-i.b_n}{2}$ et remplaçons a_n et b_n par leurs expressions respectives. On a alors :
$$c_n=\frac{1}{2}.\left[\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).\cos(n\omega x).dx-i.\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).\sin(n\omega x).dx\right]=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).e^{-in\omega x}.dx$$

On a par analogie $c_{-n}=\dfrac{a_n+i.b_n}{2}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).e^{in\omega x}.dx$.

D'où :
$$u_n(x)=a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)=c_n.e^{in\omega x}+c_{-n}.e^{-in\omega x}$$

On pose ensuite $C_0=a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).dx$.

La fonction somme s'écrit alors :
$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n.e^{in\omega x}+c_{-n}.e^{-in\omega x}$$

Enfin, on en conclut que :
$\boxed{f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n.e^{in\omega x}}$, avec $\boxed{c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x).e^{-in\omega x}.dx}$.

<u>Remarque :</u>

On a, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{cases}a_n=c_n+c_{-n}\\ b_n=i(c_n-c_{-n})\end{cases}$.

IV/Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

1/Définition

f est C^1 par morceaux sur tout intervalle $]\alpha;\alpha+T[$ si :

(i) f est continue sur cet intervalle sauf en un nombre fini de points en lesquels elle possède des limites à droite et à gauche, notées $f(x_+)$ et $f(x_-)$.

(ii) f est dérivable de dérivée continue sauf en un nombre fini de points en lesquels elle possède des dérivées à droite et à gauche.

2/Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction périodique de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$, C^1 par morceaux sur tout intervalle $]\alpha;\alpha+T[$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, alors, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}[f(x_+)+f(x_-)]=S_f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$$

Si de plus f est continue au point x, alors on a : $f(x)=S_f(x)$

3/Propriétés du développement en série de Fourier

a/Indépendance de l'intervalle

Proposition :

Les coefficients de Fourier a_0, a_n, b_n et c_n associés à une fonction sont indépendants de l'intervalle $[\alpha;\alpha+T]$ choisi.

Conséquence : Développement en série de Fourier des fonctions paires et impaires

(i) Si f est **paire**, le développement en série de Fourier de f est un développement en série cosinus, soit :

$$S_f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x)\text{ , avec }\boxed{\begin{cases} a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x).dx \\ a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x).\cos(n\omega x).dx \\ b_n=0 \end{cases}}$$

(ii) Si f est **impaire**, le développement en série de Fourier de f est un développement en série sinus, soit:

$$S_f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(n\omega x)\text{ , avec }\boxed{\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x).\sin(n\omega x).dx \end{cases}}$$

<u>Remarque :</u> Si f est définie et bornée sur un intervalle $[0;a]$, on peut prolonger f par une fonction g sur $\mathbb{R}$ périodique afin d'obtenir une fonction développable en série de Fourier qui coïncide avec f sur $[0;a]$. On peut choisir de prendre g paire ou impaire si l'on veut obtenir un développement en cosinus ou en sinus.

b/Formule de Bessel-Parseval

Si f est développable en série de Fourier et T-périodique, alors $\|f^2\|=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0,1}^{+\infty}\left[|a_n|^2+|b_n|^2\right]$.

c/Formule de dérivation

Si f est T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable de dérivée f' continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et si f et f' sont développables en séries de Fourier tels que :

$S_f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f).\mathrm{e}^{in\omega x}$ et $S_f'(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f').\mathrm{e}^{in\omega x}$,

alors : $C_n(f')=in\omega C_n(f)$ et $S_f'(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} in\omega C_n(f).\mathrm{e}^{in\omega}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(C_n(f).\mathrm{e}^{in\omega}\right)'$.

Ainsi, le développement en série de Fourier de f' est obtenu en dérivant terme à terme celui de f.

d/Formule d'intégration

Si f est développable en série de Fourier telle que $S_f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f).\mathrm{e}^{in\omega x}$ avec $c_0=\frac{1}{T}\int_{[T]} f(x).dx=0$, alors on a $g(x)=\int_0^x f(t).dt$ développable en série de Fourier, de développement : $S_g(x)=\alpha_0+\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n.\frac{\mathrm{e}^{in\omega x}}{in\omega}$, avec $\alpha_0=\frac{1}{T}\int_0^T g(x).dx$.

e/Produit & convolution

Soient f et g deux fonctions T-périodiques et développables en séries de Fourier telles que :

$S_f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n.\mathrm{e}^{in\omega x}$ et $S_g(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\beta_n.\mathrm{e}^{in\omega x}$. On a alors :

(i) La fonction $f\cdot g$ est développable en série de Fourier, de développement

$$S_{f\cdot g}(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma_n.\mathrm{e}^{in\omega x}, \text{ avec } \gamma_n=\sum_{p+q=n}\alpha_n.\beta_n.$$

(ii) La fonction $f*g$ (appelé convolée de f et g), qui est définie par :

$(f*g)(x)=\int_0^T f(t).g(x-t).dt=\int_0^T f(x-t).g(t).dt=(g*f)(x)$

est développable en série de Fourier telle que : $S_{f*g}(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n.\beta_n.\mathrm{e}^{in\omega x}$.