INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

dernière MAJ : 02/10/08 - 18:50

Plan du cours :

Pré-requis :
-> calcul intégral
-> limites
-> équivalents
-> développements limités

Rappels :

1/ Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors f admet des primitives sur $[a,b]$. Soit F l'une de ces primitives, alors :
- f est dérivable sur $[a,b]$.
- $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$.

2/ Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme le réel noté $\int_a^b f$ donné par $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Problème posé : On veut étendre la définition d'une intégrale à
- des fonctions non-continues sur $[a,b]$.
- des intervalles $[a,b[$ de longueur infinie.

I/Définitions

1/Cas où l'intervalle [a,b[est de longueur infinie

a/Définitions

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Si la limite de l'intégrale $\int_a^X f$ existe et est finie lorsque X tend vers l'infini, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge ou qu'elle est définie, ou que f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

On note alors : $\int_a^{+\infty} f = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)\,dx$

Si $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f$ n'existe pas ou est infinie, $\int_a^{+\infty} f$ diverge ou n'est pas définie, ou f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

Remarque : De la même façon, on définit $\boxed{\int_{-\infty}^b f = \lim_{X\to-\infty} \int_X^b f(x)\,dx}$

b/Intégrales de Riemann en +∞

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$

La fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $[1;+\infty[$.

D'où, $\forall\, \alpha\neq1$: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx=\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X=\frac{X^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$

On distingue alors 3 cas :

1er cas : Si $1-\alpha>0$, on a $\alpha<1$ et $\lim_{X\to+\infty} X^{1-\alpha}=+\infty$, donc $\lim_{X\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$.

2ème cas : Si $1-\alpha<0$, on a $\alpha>1$ et $\lim_{X\to+\infty} X^{1-\alpha}=0$, donc $\lim_{X\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$.

3ème cas : Si $\alpha=1$, on a $\int_1^X\frac{dx}{x^\alpha}=\int_1^X\frac{dx}{x}=[\ln|x|]_1^X=\ln(X)$, donc $\lim_{X\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$.

Conclusion :

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

diverge si $\alpha \leqslant 1$.

2/Cas où les fonctions sont non-continues sur [a,b]

a/Définitions

Soit une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\lim_b f = \infty$.

Si $\lim_{X \to b} \int_a^X f$ existe et est finie, $\int_a^b f$ converge ou est définie, et f est intégrable sur $[a, b]$.

On note alors : $\int_a^b f = \lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,dx$.

Si $\lim_{X \to b} \int_a^X f$ n'existe pas ou est infinie $\lim_{X \to b} \int_a^X f$ diverge.

b/Intégrales de Riemann en 0

Exemple : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$, avec $\beta \in \mathbb{R}$

Avec la même méthode qu'au point I.1.b., on arrive à la conclusion suivante :

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ converge si $\beta < 1$.

diverge si $\beta \geqslant 1$.

Remarque : Si $\beta \leqslant 0$, $\frac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}$. L'intégrale est donc définie.

3/Remarques

1/ Pour $\int_a^{+\infty} f$, avec f non-continue en a f continue en $]a; +\infty[$, et $\lim_a f = \infty$, il faut « couper » l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles.

On écrit alors : $\int_a^{+\infty} f = \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f$ avec c dans l'intervalle $]a; +\infty[$.

On regarde ensuite les natures des deux intégrales séparément.

2/ Pour f continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f$ (par exemple).

Dans ce cas, f impaire => $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 0$.

f paire => $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2.\int_{-\infty}^{0} f$.

3/Soit f une fonction ayant un point de discontinuité en b (ou b=∞), et continue sur [a,b[.

On a alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ avec c dans l'intervalle [a;+b[.

f est donc continue sur $[a, c[$, ce qui implique que $\int_a^c f$ est définie.

Ainsi, $\int_c^b f$ et $\int_a^b f$ sont de même nature.

II/Fonctions positives

1/Critère de comparaison

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, avec un singularité en b, telles que $\forall\, x \in [a, b[$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

On a alors :

(i) $\int_a^b g$ converge => $\int_a^b f$ converge.

(ii) $\int_a^b f$ diverge => $\int_a^b g$ diverge.

Quelques intégrales de référence :

1) Intégrales de Riemann (voir I.1.b et I.2.b)

$\int_{-\infty^{-1}} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ est convergente si $\alpha > 1$

divergente si $\alpha \leqslant 1$.

2) Intégrales de Bertrand

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}[\ln(x)]^{\beta}}$ est convergente pour $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\alpha}[\ln(x)]^{\beta}}$ est convergente pour $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Cas particulier : $\int_0^1 \ln(x) = -1$ (donc convergente)

3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx$ est convergente pour $\alpha < 1$.

4) $\int_a^b \frac{dx}{|x-b|^{\alpha}}$ est convergente pour $\alpha < 1$.

5) Intégrales de trigonométrie

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$ sont convergentes pour $\alpha > 0$.

et divergentes pour $\alpha \leqslant 1$.

<u>Exemple :</u> Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$

$\forall t \in [1, +\infty[\quad , \quad t \leqslant t^2 \Leftrightarrow e^t \leqslant e^{t^2}$.

Or : $\int_1^{+\infty} e^t dt = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X e^t dt = \lim_{X \to +\infty} [e^t]_1^X = \lim_{X \to +\infty} (e^X - e) = +\infty$.

On peut voir que $\int_1^{+\infty} e^t dt$ est divergente. D'après le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$ est donc divergente.

2/Critère d'équivalence

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur $[a, b[$ avec un singularité en b.
Si $f \sim_a g$, c'est-à-dire si $\lim_b \frac{f}{g} = 0$, alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

<u>Exemple :</u> Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dt$

$f : x \to \frac{\sin(x^2)}{x^3}$ est continue est positive sur $]0,1]$.

Avec les équivalents, on a : $\frac{\sin(x^2)}{x^3} \sim_0 \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$.

En effet, $\sin(x^2) \sim_0 x^2$ car $\lim_0 x^2 = 0$.

Or, $\int_1^0 \frac{dx}{x}$ diverge, car c'est une intégrale de Riemann en 0, avec $\beta = 1 \geqslant 2$.

Ainsi, d'après le critère d'équivalence, $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dt$ est de même nature que $\int_1^0 \frac{dx}{x}$, donc est divergente.

3/Critère d'une fonction négligeable devant l'autre

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur $[a,b[$ avec un singularité en b, et $f=o(g)$ en b, c'est-à-dire $\lim_{b} \frac{f}{g}=0$. On a alors :

(i) $\int_a^b g$ converge => $\int_a^b f$ converge.

(ii) $\int_a^b f$ diverge => $\int_a^b g$ diverge.

<u>Exemple :</u> Nature de $\int_0^{+\infty} (t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} dt$

On peut déjà dire que $\int_0^{+\infty} (t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} (t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

On a : $\lim_{+\infty} t^2(t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}=\lim_{+\infty} \frac{t^2(t^2+t)}{\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}=0$.

En posant $f(t)=(t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$ et $g(t)=\frac{1}{t^2}$, on a $\frac{f(t)}{g(t)}=t^2(t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$.

D'où $\lim_{+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}=0$, donc f est négligeable devant g à l'infini, et $f=o(g)$.

Or, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}=\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente (Riemann, avec $\alpha=2>1$), donc d'après le critère d'une fonction négligeable devant l'autre, $\int_0^{+\infty} (t^2+t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} dt$ est convergente.

4/Critère d'absolue convergence

$\int_a^b f$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|$ est convergente.

$\int_a^b f$ absolument convergente => $\int_a^b f$ convergente.

<u>Attention :</u> la réciproque est fausse !

<u>Exemple :</u> Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

$f:t\rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Intégration par parties : $u=\frac{1}{t}\Rightarrow u'=\frac{-1}{t^2}$ et $v'=\sin(t)\Rightarrow u'=-\cos(t)$

On a donc : $\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}dt=\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^X-\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt=\frac{-\cos(X)}{X}+\cos 1-\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt$.

Or, $\lim_{+\infty}\frac{\cos(X)}{X}=0$ car $\left|\frac{\cos(X)}{X}\right|\leqslant\frac{1}{X}$ et $\lim_{+\infty}\frac{1}{X}=0$.

On a donc : $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$.

Or, pour $t\in[1\,;+\infty[$, on a $|\cos(t)|\leqslant 1\Rightarrow\left[\frac{\cos(t)}{t^2}\right]\leqslant\frac{1}{t^2}$.

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann, avec $\alpha=2>1$), donc, d'après le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(t^2)}{t}\right|dt$ converge. Autrement dit, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t^2)}{t}dt$ est absolument convergente, d'où $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t^2)}{t}dt$ convergente, et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ convergente.

5/Intégrales d'Abel

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$, avec un singularité en b.

Si f est positive, dérivable et de dérivée première continue ($\mathscr{C}^1$), décroissante sur $[a,b[$, si $\lim_b f=0$ et si, de plus, $\exists M>0,\forall x\in[a,b[$, $\left|\int_a^x g(t).dt\right|\leqslant M$ (autrement dit, une primitive de g est bornée sur $[a,b[$), alors $\int_a^b f.g$ est convergente.

<u>Exemple :</u> Nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$

$t\rightarrow\frac{1}{t}$ est positive, dérivable et de dérivée continue, décroissante sur $[1,+\infty[$, et $\lim_{+\infty}\frac{1}{t}=0$. De plus, $\sin(t)$ admet pour primitive $-\cos(t)$, qui est bornée.

Donc, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.