

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES

dernière MAJ : 03/01/09 - 16:40

Plan du cours :

I/Valeurs et vecteurs propres

- 1/Vecteur propre, valeur propre et spectre
- 2/Polynôme caractéristique
- 3/Sous-espace propre

II/Diagonalisation

- 1/Principe
- 2/Conditions de diagonalisabilité

III/Trigonalisation

- 1/Définition
- 2/Matrices de Jordan

Dans ce chapitre, on prendra :

- E un K -ev de dimension finie n , avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- T un endomorphisme de E ($T : E \rightarrow E$)
- A la matrice associée à T dans la base \mathcal{B} de E ($A = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$)

I/Valeurs et vecteurs propres

1/Valeur propre, vecteur propre et spectre

Définitions :

- Un vecteur propre de T est un vecteur v non nul de E tel que : $\exists \lambda \in K ; T(v) = \lambda \cdot v$.
- λ est appelée valeur propre de T .
- λ est une valeur propre de T si et seulement si : $\exists v \in E, v \neq O_E ; T(v) = \lambda \cdot v$.
- On dit que v est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ .

Remarque :

$$\exists v \in E, v \neq O_E ; T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow \text{Ker}(T - \lambda \cdot \text{id}_E) \neq \{O_E\}$$

Exemple : Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

$$T(1, 0) = (2, 0) = 2 \cdot (1, 0).$$

On dit que le vecteur $(1, 0)$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 2.

Définition :

λ est valeur propre de A si et seulement si $\exists v \in E, v \neq O_E ; A \cdot [v]_B = \lambda \cdot [v]_B$.
L'ensemble des valeurs propres de T (ou de A) est appelé spectre de T (ou de A).
Il est noté $sp(T)$ (ou de $sp(A)$).
 T et A ont le même spectre. Si λ est une valeur propre de A , alors λ est une vp de T .

2/Polynôme caractéristique

Définitions :

On appelle polynôme caractéristique de A noté P le polynôme de degré n , tel que : $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_d)$.
Les racines de P sont les valeurs propres de A .
Quelque soit la base \mathcal{B} de E choisie, P est le même.

Remarque :

On a :

$$\det(A - \lambda \cdot I_d) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P(\lambda)$$

On obtient donc : $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_d) = (-1)^n \cdot \lambda^n + C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \cdot \lambda + C_0$.

Si $\lambda = 0$, on a $P(\lambda) = C_0 = \det(A)$.

En développant par rapport à une ligne ou une colonne, on trouve que :

$$C_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(A) \text{ avec } \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ (somme des éléments de la diagonale de } A \text{)}.$$

$$\text{D'où : } P(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det(A).$$

Exemple : Calculons le polynôme caractéristique de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_d) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 & 6 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -10 & -5 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

Soit :

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 \\ -10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

Enfin :

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)^2.$$

Or, λ est valeur propre de P si $P(\lambda) = 0$. Donc ici, 2 et -2 sont valeurs propres doubles de P .

3/Sous-espace propre

Définition :

On appelle sous-espace propre de T associé à la valeur propre λ le sev noté E_λ tel que :
 $E_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \cdot \text{id}_E) = \{v \in E, T(v) = \lambda \cdot v\}$

Propositions :

- (i) $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{O_E\}$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- (ii) $\forall v \in E_\lambda, T(v) \in E_\lambda$ (c'est-à-dire que E_λ est stable par T).

Exemple : Soit l'application linéaire suivante :

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ telle que } T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (8x_1 + 5x_2 + 6x_3, -2x_2, -10x_1 - 5x_2 - 8x_3, 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)$$

On a donc : $[T]_{E_4} = A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a vu précédemment que le polynôme caractéristique P de A est : $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2$, et que 2 et -2 sont valeurs propres doubles de P .

Remarque : $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (X_1, X_2, X_3, X_4) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

Déterminons les sous-espaces propres de T associés à 2 et -2 .

- $E_2 = \text{Ker}(T - 2 \cdot \text{id}_E) = \text{Ker}(A - 2 \cdot I_d)$.

Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker}(T - 2 \cdot \text{id}_E)$.

On a : $(T - 2 \cdot \text{id}_E)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (A - 2 \cdot I_d) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$(A - 2 \cdot I_d) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où : $(A - 2 \cdot I_d) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 \end{cases}$.

D'où : $v = (0, 0, 0, x_4) = x_4(0, 0, 0, 1) = \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$.

$(0, 0, 0, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Soit $\{(0, 0, 0, 1)\}$ est une base de E_2 , et $\dim(E_2) = 1$.

- $E_{-2} = \text{Ker}(T + 2 \cdot \text{id}_E) = \text{Ker}(A + 2 \cdot I_d)$.

De façon analogue, on trouve : $v = x_1 \cdot (1, -2, 0, 0) + x_4 \cdot (0, -24, 20, 1)$.

$(1, -2, 0, 0)$ et $(0, -24, 20, 1)$ sont deux vecteurs associés à la valeur propre -2 .

Une base de E_{-2} est $\{(1, -2, 0, 0), (0, -24, 20, 1)\}$, et $\dim(E_{-2}) = 2$.

II/Diagonalisation

1/Principe

Définition :


Diagonaliser T (ou $A = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$) consiste à trouver une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de T est diagonale. Autrement dit, il faut trouver \mathcal{B}' , base de E , telle que $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (avec P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}') soit diagonale. On dit alors que $[T]_{\mathcal{B}'}$ et A sont semblables.

Cas particulier :

S'il existe une base \mathcal{B}' de E constituée de vecteurs propres, alors $[T]_{\mathcal{B}'} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

avec λ_i les valeurs propres de T . Certains λ_i peuvent être identiques.

Remarque :

 La diagonalisation n'est pas toujours possible.

2/Conditions de diagonalisabilité

1ère condition :

Le polynôme caractéristique de T (ou de A) doit être scindé sur K , c'est-à-dire que ses racines doivent appartenir à l'ensemble K .

Exemple : Soit $P = X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 1)$.

P admet pour racines 1 , -1 , i et $-i$.

P est donc scindé sur \mathbb{C} , mais est non-scindé sur \mathbb{R} (car $i \notin \mathbb{R}$).

Remarque : Tout polynôme est scindé sur \mathbb{C} .

2ème condition :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives m_1, \dots, m_k .

C'est-à-dire : $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, avec $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I_d)) = m_i$.

Conséquence : T est diagonalisable.

Remarques :

- $1 \leq \dim(\text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I_d)) \leq m_i$.

- Si P admet n racines distinctes 2 à 2 (elles sont simples), alors T est diagonalisable.

- S'il existe λ_i racine de P de multiplicité m_i telle que $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I_d)) < m_i$, alors T n'est pas diagonalisable.

Conclusion :

Pour diagonaliser T :

- 1) On prend une matrice A dans une base bien choisie.
- 2) On calcule $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_d)$.
- 3) On résout $P(\lambda) = 0$.
 - a) P n'est pas scindé sur K , T est non-diagonalisable.
 - b) P est scindé sur K .

Si les racines de $P(\lambda_i)$ sont de multiplicité m_i , on détermine chaque E_{λ_i} en trouvant une base de vecteurs propres.

 - i) S'il existe $i \in \{1, \dots, k\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) < m_i$, T est non-diagonalisable.
 - ii) Si $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$, T est diagonalisable.

II/Trigonalisation**1/Définition**

T est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ telle que $[T]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

2/Matrices de Jordan**a/Matrice nilpotente de Jordan**Définition :

Une matrice nilpotente de Jordan d'ordre n est une matrice $n \times n$ telle que $N = (n_{ij})_{n \times n}$, avec :

$$\begin{cases} n_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i+1 \\ n_{ij} = 0, 1 \quad \forall j = i+1 \end{cases}$$

L'entier p tel que $N^{p-1} \neq (0)_{n \times n}$ est $N^p = (0)_{n \times n}$ est appelé indice de nilpotence.

Exemple : Calculons l'indice de nilpotence de $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a : $N_1^3 = (0)_{3 \times 3}$, et $N_1^2 \neq (0)_{3 \times 3}$, donc $p = 2$.

b/Matrice de Jordan

Définition :

Une matrice J $n \times n$ est dite de Jordan si elle est de la forme $J = D + N$, avec :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (où } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } J \text{) et } N \text{ une matrice nilpotente de Jordan.}$$

On a également $D.N = N.D$.

Proposition :

Si P , polynôme caractéristique de T , est scindé sur K , alors T est triangularisable (ou jordanisable) s'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice T soit de Jordan.

Résumé :

Pour trigonaliser T :

- 1) On prend une matrice A dans une base bien choisie.
- 2) On calcule $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_d)$.
- 3) On résout $P(\lambda) = 0$.
- 4) Si P est scindé sur K et s'il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_i \cdot I_d)) < m_i$, alors on complète la famille libre de vecteurs propres de A en une base de E de telle sorte que dans cette base, on ait $A = [T]$ de Jordan.