DÉTERMINANTS

dernière MAJ : 20/12/08 - 17:15

Plan du cours :

I/Définition

Définition :

Soit $A=(a_{11})_{1\times 1}$ une matrice 1×1 . Le déterminant de A , est le scalaire $det(A)=|A|=a_{11}$.

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 . Le déterminant est $det(A)=|A|=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$.

II/Développement d'un déterminant en cofacteurs

1/Définitions et calculs

Définitions :

Soit $A=(a_{ij})_{n\times n}$ une matrice carrée $n\times n$. Notons A_{ij} la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue de A en rayant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne.

On a :
- A_{ij} est le mineur de l'élément a_{ij} .
- Le scalaire $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}.det(A_{ij})$ est le cofacteur associé à l'élément a_{ij} .
- La matrice notée $com(A)=(\Delta_{ij})_{n\times n}$ est appelée matrice des cofacteurs de A (ou comatrice de A).

Exemple :

Cherchons la comatrice de $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

On a : $A_{11}=(a_{22})$; $A_{12}=(a_{21})$; $A_{22}=(a_{11})$; $A_{21}=(a_{12})$.

D'où : $\Delta_{11}=a_{22}$; $\Delta_{12}=-a_{21}$; $\Delta_{22}=a_{11}$; $\Delta_{21}=-a_{12}$.

Donc : $com(A)=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Le déterminant de A est le scalaire définit par :

- $det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$ (développement en cofacteurs par rapport à la ligne i)

ou

- $det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$ (développement en cofacteurs par rapport à la colonne j)

<u>Remarques :</u>
- Le déterminant est le même, quelque soit la ligne ou la colonne choisie.
- $det(A)=det({}^{t}A)$.

<u>Exemple :</u> Cherchons $det(A)=\begin{vmatrix} -1^{+} & 2 & 1 \\ 0^{-} & 2 & 14 \\ 0^{+} & 0 & 5 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la 1ère colonne.

$$det(A)=+\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}.(-1)-(0).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}+(0).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}=-10 .$$

<u>Remarques :</u>
- Si $A=(a_{ij})_{n\times n}$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), son déterminant est égal au produit des termes de la diagonale : $det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- Lorsqu'on se déplace en colonne ou en ligne, on alterne le signe affecté à chaque terme.

2/Règle de Sarrus

Soit une matrice $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, et soit A' la matrice augmentée de A telle que :

$$A'=(a_{ij})_{5\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

On a alors:
$$det(A)=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{21}.a_{32}.a_{13}+a_{31}.a_{12}.a_{23}-a_{21}.a_{12}.a_{33}-a_{11}.a_{32}.a_{23}-a_{31}.a_{22}.a_{13} .$$

Ou :
$$det(A)=\sum\left(\prod \textit{termes diagonales descendantes}\right)-\sum\left(\prod \textit{termes diagonales montantes}\right) .$$

Cette règle ne marche que pour des matrices 2×2 ou 3×3 .

III/Propriétés d'un déterminant

Soit une matrice $A=(a_{ij})_{n\times n}$ avec $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (respectivement $C_1, C_2, \ldots, C_n$) les lignes (respectivement les colonnes) de cette matrice.
On notera $|A|=det(A)=det(L_1,\ldots,L_n)=det(C_1,\ldots,C_n)$.

1/Échange de deux lignes (ou colonnes)

Si on échange deux lignes (ou colonnes) d'une matrice, son déterminant change de signe :
$det(L_1,\dots,L_i,\dots,L_j,\dots,L_n) = -det(L_1,\dots,L_j,\dots,L_i,\dots,L_n)$
$det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) = -det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)$

Exemple :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

2/Multiplication par un scalaire

Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'une matrice par $\lambda \in K$, on a :
$det(L_1,\dots,\lambda.L_i,\dots,L_n) = \lambda\, det(L_1,\dots,L_i,\dots,L_n) = \lambda.det(A)$
$det(C_1,\dots,\lambda.C_i,\dots,C_n) = \lambda\, det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) = \lambda.det(A)$

Exemple :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Si on multiplie tous les éléments de la matrice par $\lambda \in K$, on a :
$det(L_1,\dots,\lambda.L_i,\dots,L_n) = \lambda^n.det(A)$

Exemple :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 9 & 27 & 3 \\ 3 & 3 & 30 \\ -3 & -12 & -3 \end{vmatrix} = 27.\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

3/Combinaison linéaire

Si on ajoute à une ligne (respectivement à une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonne), on ne modifie pas la valeur d'un déterminant. On a :
$$det(L_1,\dots,L_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j L_j,\dots,L_n) = det(L_1,\dots,L_i,\dots,L_n) = det(A)$$
$$det(C_1,\dots,C_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j C_j,\dots,C_n) = det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) = det(A)$$

Exemple :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = det(C_2, C_2-C_1, C_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

4/Vecteurs liés

Si les vecteurs (ou colonnes) d'une matrice sont liés, le déterminant de cette matrice est nul.

Exemple :

$det(A)=\begin{vmatrix}-4 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$ car $C_1+C_2=C_3$.

5/Produit de deux matrices

Si $A=(a_{ij})_{n\times n}$ et $B=(b_{ij})_{n\times n}$, on a : $det(A.B)=det(A).det(B)$.

6/Inverse d'une matrice

Soit $A=(a_{ij})_{n\times n}$ une matrice. A est inversible si et seulement si $det(A)\neq 0$.
On a alors : $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}.{}^t(com(A))$.

Exemple : Cherchons l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$det(A)=-12\neq 0$, donc A est inversible.

$com(A)=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ -3 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -11\end{pmatrix}={}^t(com(A))$, donc $A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ -3 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -11\end{pmatrix}$.

IV/Déterminants et systèmes linéaires

On considère des systèmes linéaires de n équations à n inconnues, de la forme :

$$(S)=\begin{cases}a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1\\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{n1}.x_1+a_{n2}.x_2+\ldots+a_{nn}.x_n=b_n\end{cases}$$ avec $a_{ij}, x_i, b_j\in K$.

Ces équations se mettent sous la forme $(S)=A.X=B$, avec $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$.

On peut résoudre ces équations grâce à la méthode de Cramer :

- Si $det(A)\neq 0$, (S) a une unique solution $(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)$ donnée par :

$x_i=\dfrac{D_{x_i}}{det(A)}\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$, avec D_{x_i} le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la i^ème^ colonne de A par le vecteur colonne B.

Soit : $D_{x_i}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n,1 & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- Si $det(A)=0$, (S) n'a pas de solution (ou en a une infinité).

Exemple :

Résolution du système $(S)=\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+3z=1 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$.

On a $(S)\Leftrightarrow A.X=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$det(A)=-12\neq 0$, donc (S) admet une solution unique (x,y,z) telle que :

$x=\dfrac{D_x}{det(A)}$; $y=\dfrac{D_y}{det(A)}$; $z=\dfrac{D_z}{det(A)}$.

On trouve : $D_x=2$; $D_y=-13$; $D_z=-9$, soit $Sol=\left\{\left(-\frac{1}{6},\frac{13}{12},\frac{3}{4}\right)\right\}$.

V/Déterminants et bases

Proposition :

Soit E un K-ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
La famille de n vecteurs $\mathcal{B}'=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ de E est une base de E si et seulement si la matrice P dont les vecteurs colonnes sont les $[u_i]_B$ a un déterminant non-nul.

Définition :

Soit E_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}$ une autre base de $\mathbb{R}^n$. Considérons P la matrice de passage de E_n vers $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base directe si $|P|>0$, ou indirecte si $|P|<0$.