APPLICATIONS LINÉAIRES

dernière MAJ : 10/12/08 - 17:38

Notes :
Pour ce chapitre, on considérera que E , F et G sont deux K-ev sur le même corps $K=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

SEV = Sous-espace vectoriel
EV = Espace vectoriel

I/Définitions

Définition :

Une application linéaire T de E dans F est une application $T : E \to F$ telle que :
- $\forall a \in K, \forall u \in E ; T(a.u) = a.T(u)$
- $\forall (u, v) \in E^2 ; T(u+v) = T(u) + T(v)$

ou, telle que :
- $\forall a \in K, \forall (u, v) \in E^2 ; T(a.u+v) = a.T(u) + T(v)$

Exemple :

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application telle que $T(x, y) = (4x+5y, 6x-y)$. Montrons que T est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Soient :
$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

On a :
$a.u+v = a(x, y) + (x', y') = (a.x+x', a.y+y')$
$T(a.u+v) = (4.a.x+4.x'+5.a.y+5.y', 6.a.x+6.x'-a.y-y')$
$T(a.u+v) = a.(4.x+5.y, 6.x-y) + (4.x'+5.y', 6.x'-y')$
$T(a.u+v) = a.T(u) + T(v)$, donc T est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Soit $T : E \to F$. Si $T(O_E) \neq O_F$, alors T n'est pas une application linéaire. Une condition nécessaire mais non-suffisante pour que T soit une application linéaire est que $T(O_E) = O_F$.

Cas particuliers : Soit $T : E \to F$ une application linéaire :
- si $E = F$, T est un **endomorphisme** de E .
- si T est bijective, T est un **isomorphisme** de E .
- si T est bijective, et si $E = F$, T est un **automorphisme** de E .

II/Image et noyau d'une application linéaire

1/Image d'une application linéaire

Théorème :

Soit $T : E \to F$ une application linéaire.
Si E_1 est un sev de E , alors $T(E_1)$ est un sev de E .

Définitions :

- Le sev $T(E)$ de F est appelé **image de *T*** et noté $\text{Im}(T)$.
On a : $\text{Im}(T)=\{v\in F\,;\exists u\in E\,;v=T(u)\}$ et $\text{Im}(T)\subset F$

- La dimension de $\text{Im}(T)$ est le rang de T, noté $rg(T)$.
On a : $rg(T)=dim(\text{Im}(T))$.

Remarques :

- T surjective $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(T)=T(E)=F$ $\Leftrightarrow$ $\forall v\in F,\exists u\in E\,;v=T(u)$ (un seul au moins)
- T bijective $\Leftrightarrow$ $\forall v\in F,\exists!u\in E\,;v=T(u)$ (un unique)

2/Noyau d'une application linéaire

Théorème :

Soit $T:E\rightarrow F$ une application linéaire.
Si F_1 est un sev de F, alors $T^{-1}(F)$ est un sev de E.

Définition :

Le sev $T^{-1}(O_F)=T^{-1}(\{O_F\})$ de E est appelé **noyau de *T*** et noté $Ker(T)$.
On a : $Ker(T)=\{u\in E,T(u)=O_F\}$ et $Ker(T)\subset E$.

Remarque : T injective $\Leftrightarrow$ $Ker(T)=\{O_E\}$.

Exemple : Soit l'application linéaire $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ telle que $T(x,y,z)=(x+y,x+2y-z)$.
Déterminons $Ker(T)$.

Soit $u=(x,y,z)\in Ker(T)$.

On a $T(u)=T(x,y,z)=(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $(x+y,x+2y-z)=(0,0)$
D'où : $x+y=0$ et $x+2y-z=0$, soit $y=-x$ et $z=-x$.

Donc $u=(x,-x,-x)=x(1,-1,-1)$.
$\{(1,-1,-1)\}$ est une famille génératrice de $Ker(T)$. Elle est libre (un seul vecteur), d'où $\{(1,-1,-1)\}$ est une base de $Ker(T)$.
Soit : $Ker(T)=\mathbb{R}.(1,-1,-1)$.

3/Images et bases

On suppose maintenant que E est de dimension finie.

Théorème :

> Soit $T:E\to F$ une application linéaire.
> Si $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ est une base de E, alors
> $T(B)=\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_n)\}$ engendre $T(E)=\mathrm{Im}(T)$.
>
> Dans le cas où T est un isomorphisme, $T(B)$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$.

Exemple : Soit l'application linéaire $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ telle que $T(x,y,z)=(x+y,x+2y-z)$.
Déterminons $\mathrm{Im}(T)$.

Soit $\varepsilon_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
D'après le théorème, $T(\varepsilon_3)=\{T((1,0,0)),T((0,1,0)),T((0,0,1))\}$ engendre $\mathrm{Im}(T)$.
On a :
$T((1,0,0))=(1,1)$
$T((0,1,0))=(1,2)$
$T((0,0,1))=(0,-1)$
Donc : $\{(1,1),(1,2),(0,-1)\}$ engendre $\mathrm{Im}(T)$.
$\mathrm{Im}(T)\subset\mathbb{R}^2$, donc $\{(1,1),(1,2),(0,-1)\}$ est une famille liée car $dim(\mathrm{Im}(T))\leqslant dim(\mathbb{R}^2)=2$.
Cependant, on peut garder $\{(1,1),(0,-1)\}$ est une famille libre (car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires). Donc $\{(1,1),(0,-1)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$.
De plus, comme $dim(\mathrm{Im}(T))=dim(\mathbb{R}^2)=2$ et $\mathrm{Im}(T)\subset\mathbb{R}^2$, on peut en conclure que $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}^2$ et que T est surjective.

III/Théorème du rang

Énoncé :

> Soit $T:E\to F$ une application linéaire. Supposons que E est de dimension finie. On a alors :
>
> $$rg(T)+dim(Ker(T))=dim(E),$$
> soit : $dim(\mathrm{Im}(T))+dim(Ker(T))=dim(E)$.

Corollaire :

> Si $T:E\to F$ est linéaire, et que $dim(F)=dim(E)=n$, alors T est bijective (donc injective et surjective).
> Soit $Ker(T)=\{O_E\}$ et $\mathrm{Im}(T)=F$.

IV/Applications linéaires et matrices

Dans cette partie, E et F sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, avec $dim(E)=n$ et $dim(F)=m$. On considérera $T:E\to F$ une application linéaire.

<u>Définition :</u>

> Soit $\mathcal{A}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ et $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ des bases respectivement de E et F . La matrice T relative aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la matrice $A=(a_{ij})_{m\times n}=[T]_{B,A}$, où les a_{ij} sont tels que : $T(u_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.v_i$.

Autrement dit, la j$^{\text{ème}}$ colonne de A est la matrice coordonnées du vecteur $T(u_j)$ dans la base $\mathcal{B}$, soit $[T(u_j)]_B=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

<u>Conséquence :</u>

$$[T(u_{ij})]_B=[T]_B,A.[u_j]_A\Rightarrow\forall u\in E,[T(u)]_B=[T]_B,A.[u]_A$$

<u>Exemple :</u>

Soit $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, avec $T(x,y,z,t)=(x-z+t,2x+y+3t,x+2y+3z+4t)$
Déterminons la matrice de T dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

$$T((1{,}0{,}0{,}0))=(1{,}2{,}1)$$
$$T((0{,}1{,}0{,}0))=(0{,}1{,}2)$$
$$T((0{,}0{,}1{,}0))=(-1{,}0{,}3)$$
$$T((0{,}0{,}0{,}1))=(1{,}3{,}3)$$

$$A=[T]_{\varepsilon_3,\varepsilon_4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque :</u> On parle de matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Deux matrices peuvent représenter la même application linéaire, selon les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ choisies.

<u>Exemple :</u> Soient $P_2=\mathbb{R}_2[X]$ et $P_3=\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degrés respectivement inférieurs ou égaux à 2 et à 3. Soit $T:P_2\to P_3$ d'application linéaire définie par :
$T\left(\left(a_0+a_1.X+a_2.X^2\right)\right)=(2.a_0+2.a_2)+(a_0+a_1+3.a_2).X+(a_1+2.a_2).X^2+(a_0+a_2).X^3$.
Cherchons la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{A}=\{1,1-X,X^2\}$ de P_2 et $\mathcal{B}=\{1,X,1-X^2,1+X^3\}$ de P_3 .

On a : $T(1)=2+X+X^3=(1).1+(1).X+(0).(1-X^2)+(1).(1+X^3)\Rightarrow[T(1)]_B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De la même façon, on trouve :

$$[T(1-X)]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } [T(X^2)]_B=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\\1\end{pmatrix} .$$

On en déduit :

$$[T]_{B,A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & -2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in M_{4x3}(\mathbb{R}) .$$

<u>Théorème :</u>

> Si A est une matrice qui représente l'application linéaire $T:E\rightarrow F$, alors $rg(A)=rg(T)=dim(\operatorname{Im}(T))$

V/Opérations sur les applications linéaires

1/Addition

> Soient $S:E\rightarrow F$ et $T:E\rightarrow F$ sont deux applications linéaires de matrices respectives A et B par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de E et F .
>
> On a : - $S+T:E\rightarrow F$ linéaire
> - $[S+T]_{B,A}=A+B$

2/Multiplication par un scalaire

> Soient $T:E\rightarrow F$ une application linéaire de matrice B par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et a un scalaire.
>
> On a : - $a.T:E\rightarrow F$ linéaire
> - $[a.T]_{B,A}=a.B$

3/Composition

> Soient $S:E\rightarrow F$ et $T:E\rightarrow G$ deux applications linéaires de matrices respectives A par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et B par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
>
> On a : - $T\circ S:E\rightarrow G$, définie par $T\circ S(u)=T(S(u))$ est linéaire
> - $[T\circ S]_{C,A}=[T]_{C,B}=[S]_{B,A}=B.A$

VI/Changement de bases

1/Matrice de passage

Définition :

Soit E un K-ev de dimension n. Considérons $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et $\mathcal{B}'=\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice carrée de dimension $n\times n$ dont la j$^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de u'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Autrement dit, la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de passage est $[u'_j]_B$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les bases $\mathcal{B}=\{(1,1),(1,0)\}$ et $\mathcal{B}'=\{(2,-1),(-3,1)\}$.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

$(2,-1)=(-1).(1,1)+(3).(1,0)$

$(-2,1)=(1).(1,1)+(-1).(1,0)$ Donc $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

2/Formule de changement de bases

Soit $T:E\rightarrow F$ une application linéaire, avec $dim(E)=n$ et $dim(F)=m$. Soit $A=(a_{ij})_{m\times n}$ la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (respectivement de E et F).
Si Q est la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}'$ (base de E), et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (base de F), alors la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ s'écrit $[T]_{B',A'}=P^{-1}.A.Q=[id_F]_{B',B}.[T]_{B,A}.[id_E]_{A,A'}$.

Exemple :

Soit $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $T(x,y,z)=(2x+y-z, 3x-2y+4z)$.
Cherchons la matrice associée à T dans les bases $\mathcal{A}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$
et $\mathcal{B}=\{(1,3),(1,4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Soit Q (respectivement P) la matrice de passage de E_3 (respectivement E_2), base canonique de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^2$) vers $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$).

On a : $Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. D'après la formule, $[T]_{B,A}=P^{-1}.[T]_{E_2,E_3}.Q$.

On obtient : $P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, d'où $[T]_{B,A}=\begin{pmatrix}3 & 11 & 5\\ -1 & -8 & 7\end{pmatrix}$.