

ESPACES VECTORIELS

dernière MAJ : 23/10/08 - 18:20

Plan du cours :

I/Espaces vectoriels

II/Sous-espaces vectoriels

1/Définition

2/Exemples

III/Somme de deux sous-espaces vectoriels

IV/Combinaisons linéaires

1/Définition

2/Deux exemples de combinaisons linéaires : produit scalaire, produit vectoriel

a/Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

b/Produit vectoriel sur \mathbb{R}^3

3/Exemples

V/Familles libres

1/Définition

2/Exemple

VI/Familles génératrices

1/Définition

2/Exemple

VII/Bases

1/Définitions

2/Exemples

VIII/Dimensions

IX/Bases et dimensions

1/Définitions

2/Exemple

X/Utilisation des matrices colonnes échelonnées pour la recherche de bases

Notes : Pour tout le chapitre, on prendra $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

SEV = Sous-espace vectoriel

EV = Espace vectoriel

I/Espaces vectoriels

Définition : Un espace vectoriel sur K (appelé K -espace vectoriel) est un ensemble E muni de deux opérations :

- une addition $+$: $E \times E \rightarrow E$
 $(u, v) \rightarrow (u+v)$
- une multiplication par un scalaire \cdot : $K \times E \rightarrow E$
 $(\alpha, u) \rightarrow (\alpha \cdot u)$

Ces opérations vérifient :

1. $\forall x \in E, \forall y \in E, x+y = y+x$
2. $\exists O_E \in E, \forall x \in E, x+O_E = x$, avec O_E l'élément neutre.
3. $\forall x \in E, \exists x' \in E, x+x' = O_E$, avec x' l'opposé. On note $x' = -x$.
4. $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x+y+z = (x+y)+z$. $+$ est associative.
5. $\forall a \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$
6. $\forall a \in K, \forall b \in K, \forall x \in E, (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
7. $\forall a \in K, \forall b \in K, \forall x \in E, (a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
8. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Les éléments de E sont des vecteurs, alors que les éléments de K sont des scalaires.

II/Sous-espaces vectoriels

1/Définition

Définition : Un sous-ensemble F d'un K -espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- (i) $O_E \in F$, soit le vecteur nul appartient à F .
- (ii) $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in F^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$, soit F est stable par combinaison linéaire.

OU :

- (i) $O_E \in F$
- (ii) $\forall (x, y) \in F^2, x+y \in F$ (stabilité pour $+$)
- (iii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$ (stabilité pour \cdot)

OU :

- (i) $O_E \in F$
- (ii) $\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in F^2, \alpha \cdot (x+y) \in F$

2/Exemples

1/ Dans \mathbb{C}^3 , $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3; x_1 + i \cdot x_2 = 0, x_1 + x_2 - i \cdot x_3 = 0\}$
Vérifions que F est un SEV de \mathbb{C}^3 .

- (i) $O_{\mathbb{C}^3} = (0, 0, 0)$ On a : $0 + i \cdot 0 = 0$ et $0 + 0 - i \cdot 0 = 0$, d'où $O_{\mathbb{C}^3} \in F$.
Le vecteur nul est donc inclus dans F .

(ii) Soient $u=(x_1, x_2, x_3) \in F$ et $v=(y_1, y_2, y_3) \in F$

Problème : $u+v=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in F$?

On pose : $X_1=x_1+y_1$, $X_2=x_2+y_2$ et $X_3=x_3+y_3$.

$$u+v \in F \Leftrightarrow X_1+iX_2=0 \text{ et } X_1+X_2-iX_3=0 .$$

$$* \quad x_1+y_1+i(x_2+y_2)=x_1+ix_2+y_1+iy_2=0 \text{ car } u \in F \Rightarrow x_1+ix_2=0 \text{ et } v \in F \Rightarrow y_1+iy_2=0$$

$$* \quad (x_1+y_1)+(x_2+y_2)-i(x_3+y_3)=x_1+x_2-i x_2+y_1+y_2+iy_3=0 \\ \text{car } u \in F \Rightarrow x_1+x_2-i x_3=0 \text{ et } v \in F \Rightarrow y_1+y_2-i y_3=0$$

Donc : $(u+v) \in F$. On a stabilité pour l'addition.

(iii) Soient $u=(x_1, x_2, x_3) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\alpha.u=(\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3)$. On pose : $(\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3)=(X_1, X_2, X_3)$.

$$* \quad X_1+iX_2=\alpha.x_1+i.\alpha.x_2=\alpha(x_1+ix_2)=0 \text{ car } u \in F \Rightarrow x_1+ix_2=0 .$$

$$* \quad X_1+X_2-iX_3=\alpha.x_1+\alpha.x_2-i.\alpha.x_3=\alpha.(x_1+x_2-i.x_3)=0 \text{ car } u \in F \Rightarrow x_1+x_2-i.x_3=0$$

Donc : $\alpha.u \in F$. On a stabilité pour la multiplication par un scalaire.

Les conditions (i), (ii), (iii) sont vérifiées, donc F est un SEV de \mathbb{C}^3 .

2/ $C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soit $F = \{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \int_a^b f = 0\}$. Vérifions que F est un sous-espace de $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

On a ici $O_{C^0([a, b], \mathbb{R})}$ la fonction nulle, telle que $f(x) = 0$.

$$(i) \quad \int_a^b 0 = \int_a^b O_{C^0([a, b], \mathbb{R})}(x) dx = 0 \Rightarrow O_{C^0([a, b], \mathbb{R})} \in F .$$

(ii) Soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ de F , et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a donc $f+g$ est continue.

$$\int_a^b (f+\alpha.g) = \int_a^b f + \alpha.\int_a^b g = 0 \Rightarrow (f+\alpha.g) \in F .$$

Donc : F est un SEV de $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

II/Sous-espaces vectoriels

Définition : Soient F_1 et F_2 deux SEV de E . On définit la somme de F_1 et F_2 , notée F_1+F_2 comme l'ensemble $F_1+F_2 = \{x_1+x_2; x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$. F_1+F_2 est un SEV de E .

Démonstration :

(i) F_1 est un SEV de E , donc $O_E \in F_1$
 F_2 est un SEV de E , donc $O_E \in F_2$

On a : $O_E + O_E = O_E ; O_E \in F_1 + F_2$.

(ii) Soient $u \in F_1 + F_2 ; v \in F_1 + F_2 ; \alpha \in K$.

$$u \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow \exists u_1 \in F_1, \exists u_2 \in F_2 ; u = u_1 + u_2$$

$$v \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow \exists v_1 \in F_1, \exists v_2 \in F_2 ; v = v_1 + v_2$$

On a alors : $u + \alpha \cdot v = u_1 + u_2 + \alpha \cdot (v_1 + v_2) = (u_1 + \alpha \cdot v_1) + (u_2 + \alpha \cdot v_2)$.

Or, $u_1 + \alpha \cdot v_1 \in F_1$ car $u_1 \in F_1, v_1 \in F_2$ et F_1 est un SEV de E
et $u_2 + \alpha \cdot v_2 \in F_2$ car $u_2 \in F_1, v_2 \in F_2$ et F_2 est un SEV de E .

Conséquence : $u + \alpha \cdot v \in F_1 + F_2$

(i) et (ii) impliquent donc que $F_1 + F_2$ est un SEV de E .

Remarque : Si $E = F_1 + F_2$, et si $F_1 \cap F_2 = \{O_E\}$, alors F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E , d'où E est la somme directe de F_1 et F_2 . Ceci est noté : $F_1 \oplus F_2 = E$.

IV/Combinaisons linéaires

1/Définition

Définition : Soient e_1, e_2, \dots, e_n des vecteurs de E . Une combinaison linéaire des vecteurs e_i est un vecteur x de la forme $x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot e_i) ; \alpha_i \in K$.

On note $\text{Vect}((e_i)_{1 \leq i \leq n}) = \text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}) = \langle (e_i)_{1 \leq i \leq n} \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires de e_1, e_2, \dots, e_n .

2/Deux exemples de combinaisons linéaires : produit scalaire, produit vectoriel

a/Produit scalaire canonique

Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de u et v , noté $u \cdot v$ est le scalaire $u \cdot v = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)$.

La norme du vecteur u , notée $\|u\|$ est $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

On a la propriété suivante : $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

b/Produit vectoriel

Soient $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de u et v , noté $u \wedge v$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 de coordonnées :

$$u \wedge v = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 ; x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 ; x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) .$$

Propriétés :

- Si u et v sont colinéaires, alors $u \wedge v = O_{\mathbb{R}^3} = \vec{0}$.

- Si u et v sont non colinéaires, alors $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$

On a alors : $\|u \wedge v\| = \|u\| \times \|v\| \times |\sin(\widehat{u, v})|$.

- Les vecteurs u , v et w de \mathbb{R}^3 sont coplanaires

\Leftrightarrow l'un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

$\Leftrightarrow u \wedge v \perp w$.

$\Leftrightarrow (u \wedge v) \cdot w = 0$.

3/Exemple

1) Soient $u = (1, -1, 2)$ et F_1 le plan vectoriel de vecteur normal u .

Si $v \in F_1, v \perp u \Rightarrow v \cdot u = 0$. Soit un vecteur $v = (x, y, z)$.

On a : $(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$.

On a donc : $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\}$.

Soit maintenant F_2 la droite normale engendrée par u .

$F_2 = \text{Vect}(u) = \langle u \rangle = \mathbb{R} \cdot u$.

Si $v = (x, y, z) \in F_2$, v et u sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, v = \alpha \cdot u$

D'où : $v = \alpha \cdot u = (\alpha, -\alpha, 2\alpha) = (x, y, z) \Rightarrow v = (x, -x, 2x)$.

D'où : $F_2 = \{(x, -x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$

On a donc : $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

2) Soient $u = (1, -1, 2)$, $v = (0, 1, 1)$ et F_1 le plan vectoriel engendré par u et v .

Si $w = (x, y, z) \in F_1; u, v, w$ coplanaires $\Leftrightarrow (u \wedge v) \cdot w = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } u \wedge v = (-3, -1, 1) .$$

$$(u \wedge v) \cdot w = (-3, -1, 1) \cdot (x, y, z) = -3x - y + z = 0 .$$

Soit F_2 la droite vectorielle orthogonale à $F_1, F_2 = \mathbb{R} \cdot (u \wedge v)$.

F_2 est la droite vectorielle engendrée par $u \wedge v$.

D'où : $F_2 = \{(-3, -x, x), x \in \mathbb{R}\}$. On a $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

V/Familles libres

1/Définition

Définition : Une famille de vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n, \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Les vecteurs e_i sont alors linéairement indépendants.

Une famille de vecteurs non-libre est liée, ses vecteurs sont linéairement dépendants, l'un (au moins) de ses vecteurs est alors une combinaison linéaire des autres.

2/Exemple

Dans $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, soient : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une famille libre.

$$\{E_1, E_2, E_3\} \text{ est libre si } \forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in K^3, \lambda_1 \cdot E_1 + \lambda_2 \cdot E_2 + \lambda_3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lambda_1 \cdot E_1 + \lambda_2 \cdot E_2 + \lambda_3 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 2\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une famille libre.

VI/Familles génératrices

1/Définition

Définition : Une famille de vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de l'EV E si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n, x = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = \sum_{i=1}^n (e_i \cdot \lambda_i) .$$

2/Exemple

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

En effet, soit $M \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

On a :

$$M = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VII/Bases

1/Définition

Définition : Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E .

Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base, alors tout vecteur x de E s'écrit de façon unique, tel que :

$$x = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On note $[x]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ le vecteur coordonnées de x dans la base B .

2/Exemples

- La base canonique de \mathbb{R}^n est $\{(1, 0, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)\}$.

- Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à n .

Démontrons que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est la base canonique de cet espace.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X], P = a_0 + a_1 \cdot X + \dots + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + a_n \cdot X^n$.

1/ P est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$, d'où

$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

2/ Si $a_0 + a_1 \cdot X + \dots + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + a_n \cdot X^n = 0, a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$, d'où

$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est libre.

Ainsi, $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est génératrice et libre, donc est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Dans l'exemple VI.2., B est la base canonique de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Soit $M \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $[M]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VIII/Dimensions

Définition : On dit que E est de dimension finie si E est engendré par un nombre fini de vecteurs.

Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs (cardinal).

Ce nombre est la dimension de E , noté $\dim(E)$.

Exemples :

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

- $\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \times n$

Propriétés :

- $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$
- $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$
- $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \dim E_1 \leq \dim E_2$
- $E_1 \subset E_2$ et $\dim(E_1) = \dim(E_2) \Leftrightarrow E_1 = E_2$

IX/Bases et dimensions

Si E est de dimension finie n , alors :

- toute famille libre est de cardinal au plus n , avec égalité si c'est une base.
- toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n , avec égalité si c'est une base.
- une famille de E ayant $n+1$ vecteurs est liée.

Proposition : Si $\dim(E) = n$, si F est une famille de n vecteurs, alors F est libre équivaut à :

- F est génératrice de E .
- F est une base de E .

IX/Utilisation des matrices colonnes échelonnées pour la recherche de bases

Voir chapitre sur les matrices