MATRICES

dernière MAJ : 16/10/08 - 17:35

Plan du cours :

I/Définitions

1/Définitions

Soient deux entiers $m, n \geqslant 1$. On appelle matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Les a_{ij} sont les coefficients de la matrice, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, a_{ij} se trouve sur la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne.

Soient deux matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ et $B = (b_{ij})_{r \times s}$ sur $\mathbb{K}$. Les deux matrices sont égales si :

- $m = r ; n = s$, et si
- $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

$M_{m \times n}(K)$ Est l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients sur $\mathbb{K}$.

2/Matrices particulières

a) La matrice nulle

$$O_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \forall i, j, a_{ij} = 0$$

b) Les matrices carrées de taille $m \times m$

<u>Exemple :</u> $M = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 0 \\ e & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix}$

c) Les matrices carrées diagonales

$$D = (d_{ij})_{m \times m}, d_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$$

<u>Exemple :</u> $D_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$

d) La matrice identité

$$I_m = (a_{ij})_{m x m} = I_d, \begin{cases} a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \\ a_{ii} = 1 \ \forall i \in [1, \ldots, m] \end{cases}$$

<u>Exemple :</u> $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

e) Les matrices lignes avec une ligne & les matrices colonnes avec une colonne

<u>Exemple :</u> $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&10&-1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

f) La matrice transposée

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$, la transposée de A, notée ${}^tA=(c_{ij})_{n\times m}$ est telle que $c_{ij}=a_{ji},\forall i,j$.
Les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$.

<u>Exemple :</u> Si $A=\begin{pmatrix}2&0&3&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\3&1\\1&0\end{pmatrix}$

II/Opérations sur les matrices

1/Addition

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ et $B=(b_{ij})_{m\times n}$ sont deux matrices de même taille, alors $A+B$ est une matrice $m\times n$ dont les coefficients sont :

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\forall i,j$$

D'où : $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

<u>Exemple :</u> $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$ donnent $A+B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\4&1&1\end{pmatrix}$

2/Multiplication par un scalaire

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, alors $\alpha.A$ est une matrice $m\times n$ dont les coefficients sont :

$$c_{ij}=\alpha.\,a_{ij},\forall i,j$$

D'où : $\alpha.\,A=(\alpha.\,a_{ij})_{m\times n}$

Exemple : Avec $\alpha=-2$ et $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \cos 1 \\ -2 & e^{\pi} \end{pmatrix}$, on a : $\alpha.A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -2\cos 1 \\ 4 & -2e^{\pi} \end{pmatrix}$

3/Multiplication de deux matrices

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ et $B=(b_{ij})_{m\times n}$ sont deux matrices, alors AB est une matrice $m\,x\,p$, dont les coefficients sont donnés par :

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}}$$

Remarque : La multiplication AB ne peut se faire que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{¿} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & c_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}=AB$$

Remarque : Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Proposition : Les opérations sur les matrices vérifient :

1/ $A(B+C)=AB+AC$
2/ $(A+B).C=AC+BC$
3/ $A.(BC)=(AB).C$
4/ $\alpha(AB)=(\alpha A).B$

Remarques : 1/ $\forall A\in M_{m\times n}(K), A+O_{m\times n}=O_{m\times n}+A=A$
$O_{m\times n}$ est l'élément neutre de $(M_{m\times n}(K),+)$.
2/ $\forall A\in M_{m\times n}(K), A.I_m=I_m.A=A$
3/ $\forall B\in M_{m\times p}(K), B.O_{m\times n}=O_{m\times p}$

Proposition : $(M_{m\times n}(K),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $+$ l'addition de deux matrices, et $\cdot$ la multiplication d'une matrice par un scalaire.

III/Méthode du pivot

1/Opérations élémentaires sur les lignes

a/Matrice ligne échelonnée

<u>Définition :</u> Une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice consiste à :
1/Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
2/Remplacer la ligne L_i par $L_i+\alpha.L_j$ avec $i\neq j$.
3/Échanger deux lignes.

<u>Définition :</u> Une matrice $A=(a_{ij})_{m\times n}$ est ligne échelonnée si :
1/Le premier élément non nul de la $i^{ème}$ ligne (appelée pivot) en partant de la gauche est 1 dans la colonne k_i et si ce 1 est le seul élément non nul de la $k_i^{ème}$ colonne.
2/ $k_1<k_2<\ldots<k_i\leqslant n$.
3/ Les $m-r$ lignes restantes sont nulles.

b/Matrices ligne équivalentes

<u>Définition :</u> Deux matrices A et B de même taille $M_{m\times n}(K)$ sont ligne équivalentes si B est obtenue de A par une série d'opérations élémentaires sur les lignes.

<u>Théorème :</u> Toute matrice de $M_{m\times n}(K)$ est ligne équivalente à une unique matrice ligne échelonnée.

<u>Proposition :</u> Soit $A\in M_{m\times n}(K)$ et B la matrice ligne échelonnée associée à A , le rang de A , noté $rg(A)$ est le nombre de lignes non nulles de B . On a $rg(A)=rg({}^tA)$.

c/Applications

α/Résolution de systèmes linaires

Un système linéaire de m équations à n inconnues $x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n$ est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2 \\ a_{31}.x_1+a_{32}.x_2+\ldots+a_{3n}.x_n=b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+\ldots+a_{mn}.x_n=b_n \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver l'ensemble des n-uplets $(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)$ qui vérifient le système.

Ce système s'écrit de façon matricielle $A.X=B$, avec $A=(a_{ij})_{m\times n}$; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

<u>Définition :</u> On appelle et on note $(A|B)$ la matrice augmentée associée au système linéaire $A.X=B$ la matrice définie par : $(A|B)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$

$(A|B)$ est une matrice $m\times(n+1)$.

Théorème : Considérons le système $A.X=B$. Supposons que l'on passe de la matrice $A_1=(A|B)$ à la matrice $A_2=(A'|B')$ par une série d'opérations élémentaires. Alors, les solutions du système $A'.X=B'$ sont les solutions du système $A.X=B$.

Exemple :

Soit le système suivant : $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1-2x_2=3 \\ x_2-x_3=2 \end{cases}$

Ce système s'écrit $A.X=B$, avec :

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée de A s'écrit : $A_1=A|B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

A_1 est équivalente à la matrice ligne échelon $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-17}{8} \end{pmatrix}$

D'après le théorème, les solutions de $A.X=B$ sont les solutions de $A'.X=B'$.

On a ici $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ \frac{-1}{8} \\ \frac{-17}{8} \end{pmatrix}$.

Soit : $A'.X=B'\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ \frac{-1}{8} \\ \frac{-17}{8} \end{pmatrix}$

L'ensemble des solutions du système est $S=(\frac{11}{8};-\frac{1}{8};-\frac{17}{8})$.

Proposition : Soit $A.X=B$ un système tel que $(A|B)$ soit ligne échelonnée. Le système $A.X=B$ possède au moins une solution si et seulement si $rg(A|B)=rg(A)$, soit si et seulement s'il n'y a pas de pivot sur la dernière colonne de la matrice augmentée $(A|B)$.

ß/Résolution de systèmes linaires

Définition : Soit $A\in M_{m\times n}(K)$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $M_{m\times n}(K)$ notée A^{-1} telle que $A.A^{-1}=I_n$.

Proposition : Soit $A\in M_{m\times n}(K)$. A est inversible si $rg(A)=n$.

En pratique, on prend une matrice $A\in M_{m\times n}(K)$ telle que $rg(A)=n$. On considère la matrice augmentée $(A|I_n)$. On effectue une série d'opérations élémentaires afin de ligne échelonner la matrice A . On obtient une matrice sous la forme $(I_n|B)$, avec $B=A^{-1}$.

2/Opérations élémentaires sur les colonnes

a/Matrice colonne échelonnée

Définition : Une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice consiste à :
1/Multiplier une colonne par un scalaire non nul.
2/Remplacer la colonne C_i par $C_i+\alpha.C_j$ avec $i\neq j$.
3/Échanger deux colonnes.

Définition : Une matrice $A=(a_{ij})_{m\times n}$ est ligne échelonnée si :
1/Le premier élément non nul de la $j^{ème}$ colonne (appelée pivot) en partant du haut est 1 dans la ligne k_i et si ce 1 est le seul élément non nul de la $k_j^{ème}$ ligne.
2/ $k_1<k_2<\ldots<k_i\leqslant m$.
3/ Les $n-r$ colonnes restantes sont nulles.

Remarque : Pour colonne échelonner A , on peut ligne échelonner ${}^tA$.

b/Matrices colonne équivalentes

Définition : Deux matrices A et B de même taille $M_{m\times n}(K)$ sont colonne équivalentes si B est obtenue de A par une série d'opérations élémentaires sur les colonnes.

Théorème : Toute matrice de $M_{m\times n}(K)$ est colonne équivalente à une unique matrice colonne échelonnée.

Proposition : Soit $A\in M_{m x n}(K)$ et B la matrice colonne échelonnée associée à A , le rang de A , noté $rg(A)$ est le nombre de colonnes non nulles de B . On a $rg(A)=rg({}^tA)$.

c/Applications

α/Calcul du rang d'une famille de vecteurs et recherche de sa base standard
ß/Calcul de la dimension de l'image d'une application linéaire
γ/Inversion de matrices