Traitement du signal

Rapport de projet

Germain Le
ING3 – TD10
22/03/2010

Sommaire

1. Introduction

Le but de ce projet est de modéliser sous MATLAB© deux signaux différents. Nous allons ainsi calculer les coefficients de Fourier des signaux 4 (signal porte) et 8 (signal en dents de scie), puis nous les modéliserons à l'aide de MATLAB©.

Remarque : Dans la suite de ce rapport, on prendra $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Il convient également de rappeler que les fonctions développables en série de Fourier peuvent s'écrire sous la forme :

$$s_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.\cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.\sin(k\omega_0 t)$$

2. Signal porte

Le signal porte que nous avons eu à analyser est celui-ci :

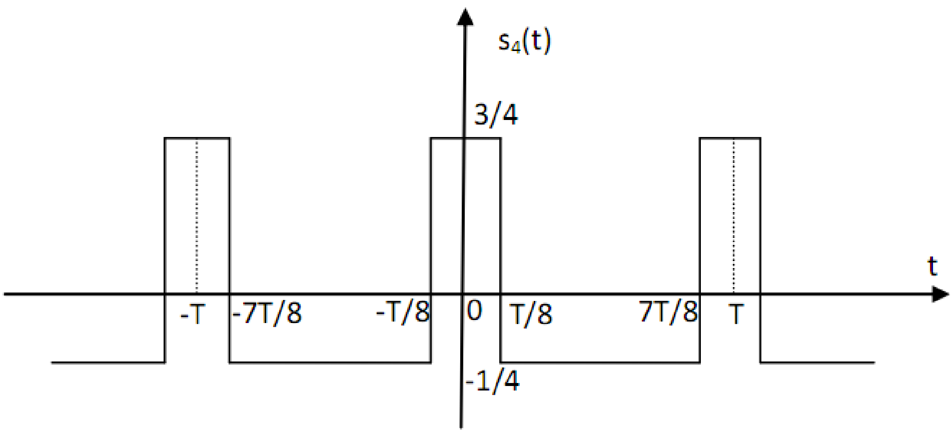

Figure 1 - Premier signal à étudier

2.1 Calcul des coefficients de Fourier

Cependant, on peut remarquer que cette fonction est paire : $s_8(t) = s_8(-t)$, donc on aura $b_k = 0$.
Calculons les autres coefficients de Fourier.
On a :

$$a_0 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/8} \frac{3}{4}dt + \int_{T/8}^{T/2} -\frac{1}{4}dt\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{T}{8} - \frac{1}{4}\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{8}\right)\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{3T}{32}-\frac{3T}{32}\right) = 0$$

Continuons avec le calcul de a_k :

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s_8(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

On peut décaler le signal de $\frac{1}{4}$ vers le haut pour faciliter le calcul. La fonction sera alors égale à 1 entre 0 et $\frac{T}{8}$, et nulle ailleurs.

Ce qui donne :

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/8} \cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\cdot I_k$$

On a ensuite :

$$I_k = \frac{1}{k\omega_0}\cdot[\sin(k\omega_0 t)]_0^{T/8} = \frac{T}{k2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

Ce qui donne enfin :

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)$$

Le signal s'écrit donc :

$$s_4(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(k\omega_0 t)$$

2.2 Simulation sous MATLAB©

Pour reconstituer le signal à l'aide de MATLAB©, il suffit de calculer la valeur de tous les harmoniques jusqu'à l'ordre désiré à l'aide de la formule déterminée auparavant.

Ainsi, nous avons trouvé :

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = -\frac{\sqrt{2}}{5\pi}$$

Le signal reconstitué a alors pour expression :

$$s_4(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi}\cos(2\omega_0 t) + \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) - \frac{\sqrt{2}}{5\pi}\cos(5\omega_0 t)$$

Voici le résultat obtenu en reconstituant le signal à l'ordre $k = 5$:

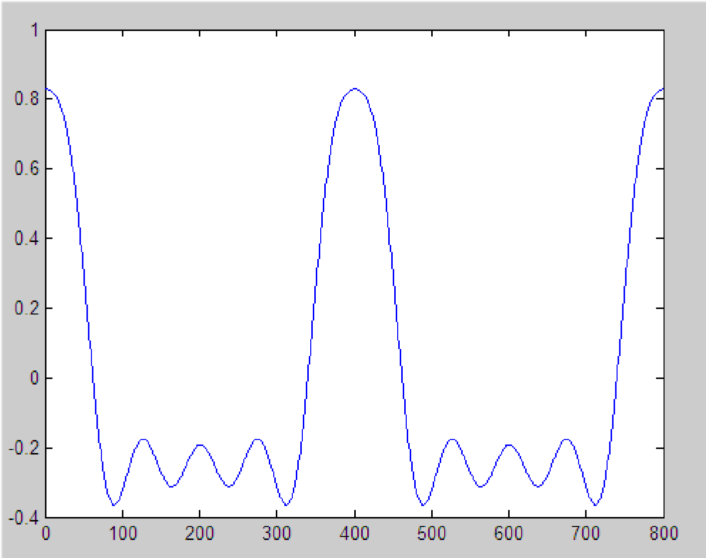

Figure 2 – Signal 4 reconstitué à l'ordre 5

On remarque que l'allure est similaire au signal de départ. Pour nous en convaincre, nous avons modélisé ce signal à l'ordre $k = 10$.

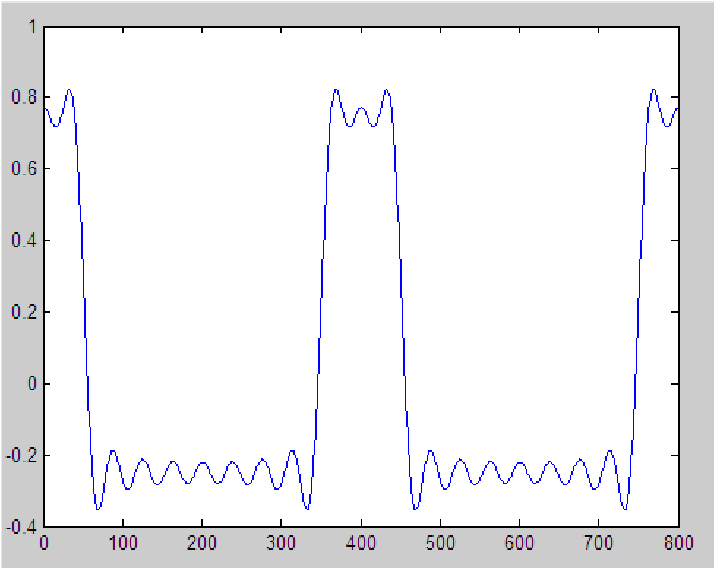

Figure 3 – Signal 4 reconstitué à l'ordre 10

Le signal la même allure que la fonction de départ. Pour le voir encore mieux, nous pourrions faire une reconstitution à l'ordre 20 ou plus.

3. Signal en dents de scie

Le signal que nous avons analysé est le suivant :

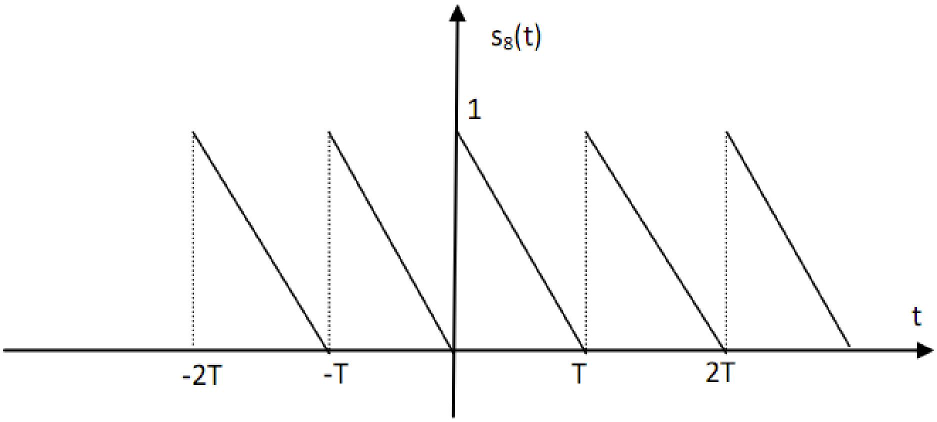

Figure 4 – Second signal à étudier

3.1 Calcul des coefficients de Fourier

Cette fois-ci, nous pouvons décaler le signal de $-\frac{1}{2}$ sur l'axe des ordonnées pour avoir une fonction impaire : $s_8(t) = -s_8(-t)$. On peut donc dire que $a_k = 0$.

Le signal a pour expression : $s_8(t) = 1 - \frac{t}{T}$.

Il reste cependant à calculer a_0, la composante continue du signal de départ :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_8(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} s_8(t)\, dt + \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} s_8(t)\, dt = \frac{1}{T} I_0 + \frac{1}{T} J_0$$

Les intégrales donnent :

$$I_0 = \int_{-T/2}^{0} \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \int_{-T/2}^{0} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} t\, dt = \frac{T}{2} + \frac{T}{8}$$

Puis,

$$J_0 = \int_{0}^{T/2} \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \int_{0}^{T/2} dt + \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} t\, dt = \frac{T}{2} - \frac{T}{8}$$

On en déduit alors :

$$a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1$$

Pour calculer b_k, nous prenons la fonction impaire $s'_8(t) = s_8(t) - \frac{1}{2} = -\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}$.

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \left(-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\right)\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\left[-\frac{1}{T}\int_0^{T/2} t\sin(k\omega_0 t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{T/2} \sin(k\omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{4}{T}\left(-\frac{1}{T}I_k + \frac{1}{2}J_k\right)$$

Calculons les deux intégrales :

$$I_k = \int_0^{T/2} t\sin(k\omega_0 t)\,dt = \left[-\frac{t}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t)\right]_0^{T/2} + \frac{1}{k\omega_0}\int_0^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\,dt$$

Or,

$$\int_0^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{k\omega_0}\big(\sin(k\pi) - \sin(0)\big) = 0$$

D'où,

$$I_k = \left[-\frac{t}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t)\right]_0^{T/2} = -\frac{T^2}{4k\pi}\cos(k\pi)$$

On a ensuite :

$$J_k = \int_0^{T/2} \sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{k\omega_0}\left(1 - \cos\left(k\omega_0\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{T}{2k\pi}(1 - \cos(k\pi))$$

En réinjectant dans l'expression d'origine :

$$b_k = \frac{4}{T}\left(-\frac{1}{T}I_k + \frac{1}{2}J_k\right) = \frac{4}{T}\left(\frac{1}{T}\frac{T^2}{4k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1}{2}\frac{T}{2k\pi}(1 - \cos(k\pi))\right)$$
$$= \left(\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1}{k\pi}(1 - \cos(k\pi))\right)$$

Enfin, on obtient :

$$b_k = \frac{1}{k\pi}$$

Le signal est donc :

$$s_4(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\sin(k\omega_0 t)$$

3.2 Simulation sous MATLAB©

Comme pour le premier signal, nous commencerons par reconstituer le signal en allant jusqu'à l'ordre 5. On trouve :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$b_3 = \frac{1}{3\pi}$$

$$b_4 = \frac{1}{4\pi}$$

$$b_5 = \frac{1}{5\pi}$$

L'expression du signal est donc :

$$s_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi} + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\pi} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3\pi} + \frac{\sin(4\omega_0 t)}{4\pi} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5\pi}$$

Nous obtenons le résultat suivant :

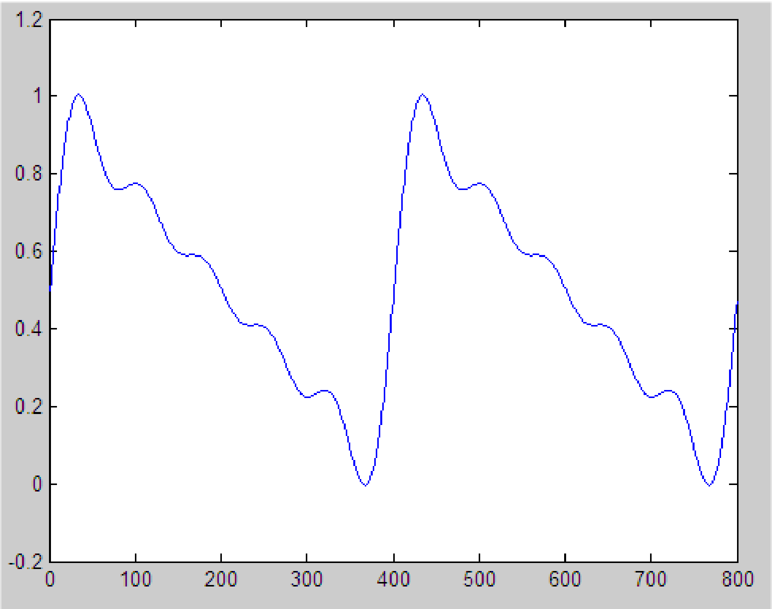

Figure 5 – Signal 8 reconstitué à l'ordre 5

Pour mieux voir la ressemblance avec le signal d'origine, nous sommes allés jusqu'à l'ordre 10 :

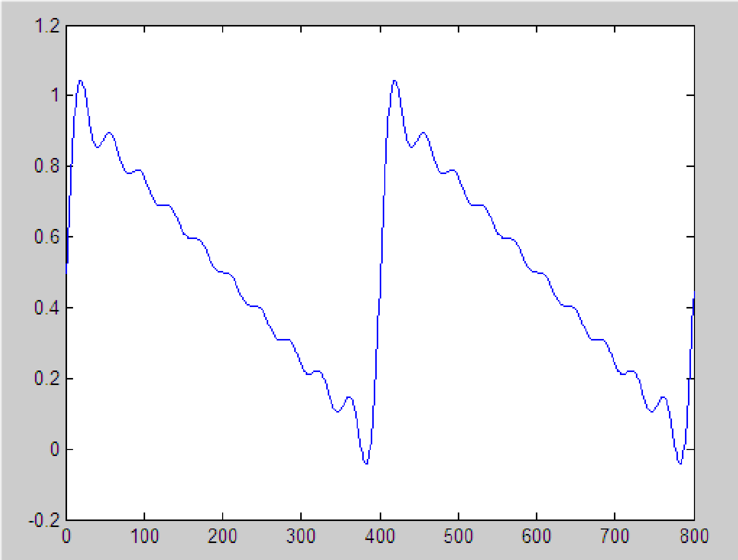

Figure 6 – Signal 8 reconstitué à l'ordre 10

Nous voyons bien que le signal reconstitué correspond au signal que nous avions au départ.

4. Conclusion

Ce projet nous a permis de pratiquer le calcul de coefficients de Fourier sur des fonctions communes. De plus, il nous a également permis de mieux comprendre le fonctionnement de la simulation sous MATLAB.

5. Bibliographie et sources

- Code source MATLAB© : complété d'après l'original de Stefan Ataman
- Simulations : MATLAB© 7.5.0 (R2007b)

Annexe 1 : Code source (Signal 4)

```
clear all
close all

% ***********************************************************************
% ************ signal parameters ****************************************
% ***********************************************************************
f=100;             % sin frequency - 100 Hz
T=1/f;              % period
fs=40000;           % sampling frequency 40kHz

N_per=2;          % number of periods

% fundamental frequency
f0=1/T;

% --- create a vector of fs/f sample * the number of periods
x_vector=0:(fs/f0*N_per-1);

% ************* generate the harmonic functions *************************
% --- cosines
% - fundamental
cos_w0=cos(2*pi*f0/fs*x_vector);
% - 2nd harmonic
cos_2w0=cos(2*pi*2*f0/fs*x_vector);
% - 3rd harmonic
cos_3w0=cos(2*pi*3*f0/fs*x_vector);
cos_4w0=cos(2*pi*4*f0/fs*x_vector);
cos_5w0=cos(2*pi*5*f0/fs*x_vector);
cos_6w0=cos(2*pi*6*f0/fs*x_vector);
cos_7w0=cos(2*pi*7*f0/fs*x_vector);
cos_8w0=cos(2*pi*8*f0/fs*x_vector);
cos_9w0=cos(2*pi*9*f0/fs*x_vector);
cos_10w0=cos(2*pi*10*f0/fs*x_vector);

% -----------------------------------------------------
% compute here the coefficients a0, ak and bk
a0= 0;

a1= sqrt(2)/pi;
a2= 1/pi;
a3= sqrt(2)/(3*pi);
a4= 0;
a5= -sqrt(2)/(5*pi);
a6 = -1/(3*pi);
a7 = -sqrt(2)/(7*pi);
a8 = 0;
a9 = sqrt(2)/(9*pi);
a10 = 1/(5*pi);

% --------------------
% generate the Fourier Series partial sum here
s_F=a0/2*ones(1,length(x_vector))+a1*cos_w0+ a2*cos_2w0  + a3*cos_3w0 +
a4*cos_4w0 + a5*cos_5w0 + a6*cos_6w0 + a7*cos_7w0 + a8*cos_8w0 +
a9*cos_9w0 + a10*cos_10w0;

% -------------------
% plot your results here
plot(s_F);
```

Annexe 2 : Code source (Signal 8)

```
clear all
close all

% ***********************************************************************
% ************ signal parameters ****************************************
% ***********************************************************************
f=100;              % sin frequency - 100 Hz
T=1/f;               % period
fs=40000;            % sampling frequency 40kHz

N_per=2;           % number of periods

% fundamental frequency
f0=1/T;

% --- create a vector of fs/f sample * the number of periods
x_vector=0:(fs/f0*N_per-1);

% ************* generate the harmonic functions *************************
% --- sines
% - fundamental
sin_w0=sin(2*pi*f0/fs*x_vector);
% - 2nd harmonic
sin_2w0=sin(2*pi*2*f0/fs*x_vector);
% - 3rd harmonic
sin_3w0=sin(2*pi*3*f0/fs*x_vector);
sin_4w0=sin(2*pi*4*f0/fs*x_vector);
sin_5w0=sin(2*pi*5*f0/fs*x_vector);
sin_6w0=sin(2*pi*6*f0/fs*x_vector);
sin_7w0=sin(2*pi*7*f0/fs*x_vector);
sin_8w0=sin(2*pi*8*f0/fs*x_vector);
sin_9w0=sin(2*pi*9*f0/fs*x_vector);
sin_10w0=sin(2*pi*10*f0/fs*x_vector);

% -----------------------------------------------------
% compute here the coefficients a0, ak and bk
a0=1;

b1= 1/pi;
b2= 1/(2*pi);
b3= 1/(3*pi);
b4= 1/(4*pi);
b5= 1/(5*pi);
b6= 1/(6*pi);
b7= 1/(7*pi);
b8= 1/(8*pi);
b9= 1/(9*pi);
b10 = 1/(10*pi);


% --------------------
% generate the Fourier Series partial sum here

 s_F=a0/2*ones(1,length(x_vector)) + b1*sin_w0+ b2*sin_2w0  + b3*sin_3w0 +
b4*sin_4w0 + b5*sin_5w0+ b6*sin_6w0 + b7*sin_7w0 + b8*sin_8w0 + b9*sin_9w0
+ b10*sin_10w0;
% -------------------
% plot your results here
plot(s_F);
```